

自主学习类

黄冈小状元



培优周课堂

—从课本到奥数 开发数学潜能—

主编 / 万志勇



数学



龙门书局 | 龙门品牌·学子至爱
www.longmenshiju.com

◆ 五年级下 ◆

目录

一、观察物体(三)	(1)
物体的摆放	(1)
二、因数与倍数	(4)
1. 巧算一个数的因数的个数	(4)
2. 巧用倍数特征解决问题	(6)
3. 巧用质数与合数解决问题	(9)
4. 巧用奇偶性解决生活问题	(11)
单元综合提优(一)	(13)
巧用分解质因数解决问题	(13)
三、长方体和正方体	(16)
1. 长方体和正方体的展开图	(16)
2. 拼割中表面积的变化	(19)
3. 装物体中的学问	(22)
4. 妙解体积与容积中的问题	(24)
5. 探索图形中的奥秘	(27)
单元综合提优(二)	(30)
放入或拿出中的容积问题	(30)
四、分数的意义和性质	(34)
1. 妙解分数的分子、分母变化问题	(34)
2. 短除法的妙用	(37)



3. 智找最大公因数和最小公倍数	(40)
4. 巧比分数的大小	(42)
5. 最大公因数与最小公倍数的生活应用	(44)
单元综合提优(三)	(48)
行程问题	(48)
五、图形的运动(三)	(52)
巧用旋转解决问题	(52)
六、分数的加法和减法	(55)
1. 巧用画图解决生活问题	(55)
2. 分数单位的巧妙拆与合	(58)
单元综合提优(四)	(61)
分数的巧妙计算	(61)
七、折线统计图	(65)
巧用折线统计图解决问题	(65)
单元综合提优(五)	(68)
找次品、打电话	(68)
全册知识整体提优(一)	(71)
全册知识整体提优(二)	(73)
全册知识整体提优(三)	(75)
参考答案	(77)





一、观察物体(三)

物体的摆放

培—优—策—略

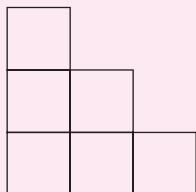
观察若干个小正方体摆放时,要根据摆放特点,有序观察;一般从正面、侧面、上面三个不同的角度观察,需运用一定的转换技巧来综合分析。



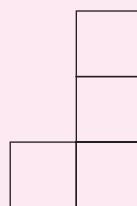
提优讲解



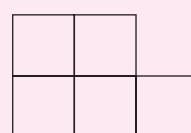
壮壮用一些大小相同的正方体木块搭了一个模型,然后从不同的角度进行观察,如图所示:



从正面看



从右面看



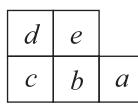
从上面看

壮壮搭这个模型一共用了多少个正方体木块?

【思路导引】



在从上面看到的图形中用“填数字”的方法可分析得出这堆正方体木块的总个数。为了叙述方便,将从上面看到的图形分别标上a、b、c、d、e(如图)。



这样就容易多了!根据从上面看到的可知正方体摆放了两排,前排a、b、c各处如果某一处或几处有2个或2个以上的正方体,那么从右面看到的就不可能是一个正方形。



我明白了:这样一来我们可以确定a、b、c处都只能是一个正方体,我们标上“1”。

那根据从正面看到的图形的左面一列有3个正方形,中间一列有2个正方形,不难得出d处有3个正方体,e处有2个正方体。



【解答】 $3+2+1+1+1=8(\text{个})$

答:壮壮搭这个模型一共用了8个正方体木块。

解答以上类型的题目,不能孤立地看某一个方向所观察到的图形,应结合几幅图进行综合分析;同时必须多次进行如“如果……,那么……”的思考,尝试得出正确的结论。

2

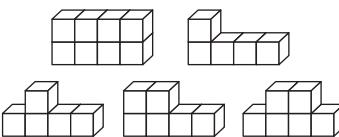
一个立体图形，从上面看到的形状是 ，从左面看到的形状是 。搭这样的立体图形，最少需要几个小正方体？最多需要几个小正方体？

【思路导引】



从上面看到的形状是 ，可以推测这个立体图形摆成了一排，且最底层有4个小正方体。从左面看到的形状是 ，可以推测小正方体摆成了上下两层。

既然如此，结合你推测的结果就有许多种摆放方法，我先列出5种：



这样一来，由以上的摆法可知：搭这样的立体图形，最少需要5个小正方体，最多需要8个小正方体！



【解答】 搭这样的立体图形，最少需要5个小正方体，最多需要8个小正方体。

根据给定的平面图形确定搭成立体图形所需正方体至少几个或最多几个时，一般采取根据给出的平面图形还原出立体图形的方法，先列出各种可能的搭法，再选择符合要求的进行解答。

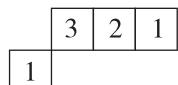
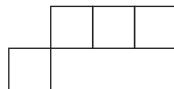
争星显优



1.



我搭的积木从上面看是这个形状。



上面的数字表示在这个位置所用的小正方体的个数。



请你画出搭的这组积木从正面和从左面看到的形状。

2. 有一些大小相同的正方体木块堆成一堆，从上面看是图1，从正面看是图2，从左面看是图3，这堆木块最少有()块。

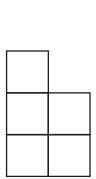


图1

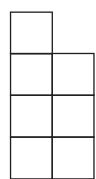


图2

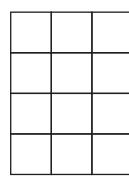


图3

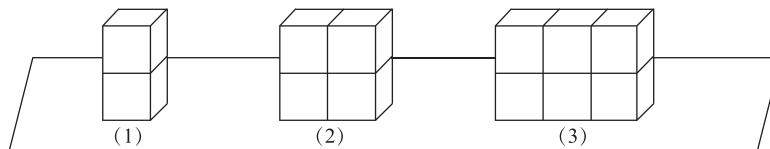


一、观察物体(三)



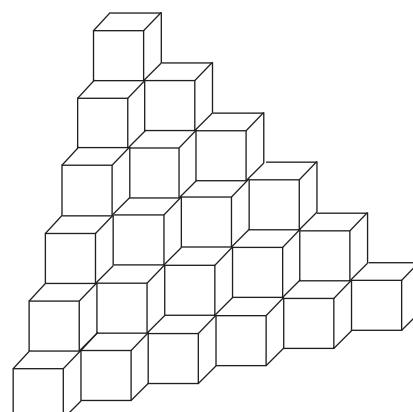
3. 用小正方体搭一个立体图形,从上面看到的形状是  ,从右面看到的形状是  。搭这个立体图形,最少需要多少个小正方体?最多需要多少个小正方体?

4. 将小正方体按下图方式摆放在桌面上。请你求出第(8)幅图中小正方体的个数和露在外面的面数。



5. 如图,在墙角处有若干个相同的小正方体堆成的立体图形(每个正方体都可独立地抽走,但如果抽走下面的正方体,上面的正方体就会自动落下来)。有人想搬走其中部分正方体,但希望从前面、上面、左面用平行光线照射时,在墙面及地面上的影子不变,则最多可以搬走多少个小正方体?

【提示:只需留下靠墙及地面的正方体,其余的都搬走。】





二、因数与倍数

1. 巧算一个数的因数的个数

培优策略

一个数的因数可用乘法算式一对一对地找出来,利用这种方法也可以推算出一个数的因数的个数。



提优讲解



80 和 144 的因数各有多少个?

【思路导引】



找80和144的因数一个一个去试去找,那很麻烦的!咋办呢?

别急嘛,先用乘法算式一对一对写出因数,再算呗!如: $80=1\times 80=2\times 40=4\times 20=5\times 16=8\times 10$, 共5对,每对2个因数,所以共有 $5\times 2=10$ 个因数。



高!这个办法好!那这样看来, $144=1\times 144=2\times 72=3\times 48=4\times 36=6\times 24=8\times 18=9\times 16=12\times 12$, 共8对, $8\times 2=16$ 个!

老弟,你仔细瞧瞧,最后一组 12×12 的两个因数是相同的,只能算1个,所以144只有 $16-1=15$ (个)因数!



【解答】 80 的因数有 10 个,144 的因数有 15 个。



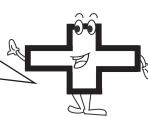
$29 \div (\quad) = (\quad) \cdots \cdots 5$, 在括号里填上合适的数使等式成立,共有多少种填法?

【思路导引】



这是个有余数的除法,根据有余数除法各部分间的关系可知: 除数×商=29-5=24,此题可看作找24的因数。

$24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6$, 因数共有 $2\times 4=8$ (个),但因为“除数比余数大”,所以除数只能填24、12、8、6。



【解答】 共有 4 种填法,分别是: $29 \div (12) = (2) \cdots \cdots 5$ 、 $29 \div (24) = (1) \cdots \cdots 5$ 、 $29 \div (8) = (3) \cdots \cdots 5$ 、 $29 \div (6) = (4) \cdots \cdots 5$ 。



如果 a 、 b 、 c 分别表示三个不同的大于 1 的自然数,且 $A=a\times b\times c$,那么 A 一共有多少个因数? (a 、 b 、 c 都是质数)

【思路导引】



没有具体的数咋想呢? 头都大了!呜……

别怕,我们可以“分类”来思考:第一类,单个的 a 、 b 、 c 都是 A 的因数;第二类: a 、 b 、 c 中的任意两个数的积都是 A 的因数;第三类: a 、 b 、 c 三个数的积也是 A 的因数;第四类: 1。





二、因数与倍数



【解答】A 的因数共有 8 个,分别是 a 、 b 、 c 、 ab 、 ac 、 bc 、 abc 和 1。

如果 a, b, c 均为不同的质数,且 $A=a \times b \times c$,那么 A 的因数的个数可分类找到:先找单个的、再依次找两数相乘的积、三数相乘的积……别忘了还有“1”。



争星显优



- 1.** 60 和 90 的因数各有多少个?

 - 2.** 196 的因数有多少个?

 - 3.** $37 \div (\quad) = (\quad) \cdots \cdots 5$, 在括号里填上合适的数, 使等式成立, 共有多少种填法?



4. 面积是 165 平方厘米的形状不同且长和宽都是整厘米数的长方形，共有多少个？

5. 一个盒子里有 96 个棋子，如果不一次拿出，也不一个一个地拿出，但每次拿的个数要相等，最后一次正好拿完。共有多少种不同的拿法？



6. 如果 a, b, c, d 表示四个不同的且大于 1 的质数，并且 $M = a \times b \times c \times d$ ，那么 M 的因数一共有多少个？

2. 巧用倍数特征解决问题

培 优 策 略

生活中的有些问题不需要具体计算,而是可以结合数据的倍数特征来思考。

提优讲解

1 超市里有 6 箱货物, 分别重 15、16、18、19、20、31 千克。两个顾客买走其中 5 箱货物, 而且一个顾客买的质量是另一个顾客的 2 倍。超市里剩下的那箱货物是多少千克?

【思路导引】



由“一个顾客买的质量是另一个顾客的2倍”知两个顾客买走的5箱货物的总质量应是 $1+2=3$ 的倍数。

既然这样, 先求出6箱货物的总质量是 $15+16+18+19+20+31=119$ (千克), $119 \div 3 = 39 \cdots \cdots 2$, 因为卖出的5箱货物是3的倍数, 所以剩下的那箱货物质量除以3应余2。



6箱货物中只有20除以3余2, 所以剩下的那箱货物就是20千克!

【解答】 $(15+16+18+19+20+31) \div (1+2) = 39 \cdots \cdots 2$

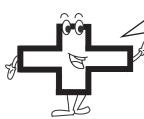
$$20 \div 3 = 6 \cdots \cdots 2$$

答: 剩下的那箱货物是 20 千克。

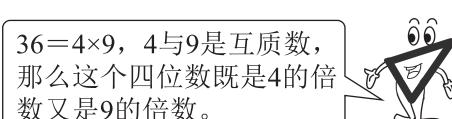
2

五(1)班 36 名同学利用本周课余时间帮学校图书管理员整理图书, 每人整理的图书本数相同。班长忘记了整理的总本数, 只记得总数是四位数, 其中百位上是数字“7”, 十位上是数字“3”。平均每人至少整理图书多少本?

【思路导引】



这个四位数可以表示为 $\square 73 \square$; 从题意可知, 这个数还是 36 的倍数哩!

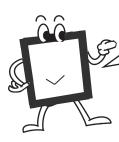


$36 = 4 \times 9$, 4与9是互质数, 那么这个四位数既是4的倍数又是9的倍数。

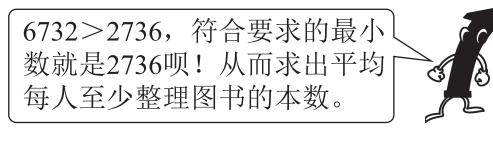


根据4的倍数特征, 可以确定这个数的个位只能填“2”或“6”。

当个位是“2”时, 根据一个数是9的倍数的特征, 这个数各位上的数字的和是 $12 + \square$, 是9的倍数, 所以方框里只能填6, 这个四位数是 6732。



当个位是“6”时, 根据一个数是9的倍数的特征, 这个数的各位上的数字和是 $16 + \square$, 是9的倍数, 所以方框里只能填2, 这个四位数是 2736。



$6732 > 2736$, 符合要求的最小数就是 2736 呀! 从而求出平均每人至少整理图书的本数。



【解答】 $2736 \div 36 = 76$ (本)

答:平均每人至少整理图书 76 本。

根据一个数的倍数特征确定这个数的倍数是多少是解题的关键。

争星显优



1. 龙一鸣买来 72 本通讯本,不料发票被墨水弄污了,总价一共是□ 47.7 □元,请你帮龙一鸣把总价算出来。
2. 依依买了 2 支铅笔、1 支圆珠笔、3 本笔记本和 6 块橡皮。已知铅笔每支 5 角,圆珠笔每支 3 元,笔记本和橡皮的价格依依记不清了。售货员要依依共付 11 元钱,但是依依认为售货员把账算错了,你知道为什么吗?
3. 花店买来 125 枝郁金香,如果每 5 枝包装成 1 束,那么能正好包装完吗? 如果每 2 枝包装成 1 束,那么至少再加几枝能正好包装完?

4. 一摞练习本,本数在 40~50 之间,2 本 2 本地发余 1 本,5 本 5 本地发也余 1 本。这摞练习本共有多少本?



5. 有 7 只桶分别装有汽油、柴油、机油,它们的容量分别是 12 升、13 升、16 升、17 升、22 升、27 升和 32 升。现知道只有 1 桶装的是汽油,而柴油总量是机油的 3 倍,但不知桶里装的是什么油。请判断每只桶里装的各是什么油?

6. 在 358 后面补上三个数字,组成一个六位数,使它分别能被 3、4、5 整除,符合这些条件的六位数中,最小的一个是多少?

7. 植树节那天,老师把 55 棵树分给三个班,一班分到的棵数是二班的 2 倍,三班最少,但也多于 10 棵,这三个班各分到多少棵树?



8. 学校买来 36 套课桌椅,不料发票被墨水弄污了,单价只剩下一个数字,为 \square 3. $\square \square$ 元,总价也不完整,只剩下 1 \square 24.5 \square 元,请你帮会计把单价和总价算出来。

【提示:总价化成以“分”为单位的数,这个数是 36 的倍数,求出符合条件的总价,再算出单价。】



3. 巧用质数与合数解决问题

培优策略

一个自然数除了1和它本身外不再有别的因数,这样的数称为质数;一个自然数除了1和它本身外,还有其他的因数,这样的数称为合数。巧妙运用质数和合数的特点,可以解决许多有趣的数学问题。



提优讲解



1 两个质数的和是39,这两个质数的积是多少?

【思路导引】



两个质数的和是39,可知两个质数必须是一奇一偶才行。

质数中的偶数只有“2”,那另一个质数自然就是 $39-2=37$ 了!



【解答】 $2+37=39$

$$2 \times 37 = 74$$

答:这两个质数的积是74。

如果两个质数的和是奇数,那么其中一定有一个质数是2。2是一个特殊的质数,很多情况都以此为突破口。



2 已知a是质数,而且 $a+4$ 、 $a+6$ 、 $a+10$ 都是质数,求符合条件的最小质数a。

【思路导引】



a是质数, $a+4$ 、 $a+6$ 、 $a+10$ 都是质数,求最小的质数a,我们只能用枚举法逐步枚举、试算。

既然是最小的,从a=2试起,一看就不符合 $a+4$ 是质数的条件,不行再试;如果a=3,则 $a+6$ 不是质数;同理a=5时, $a+10$ 不是质数;如果a=7,则 $a+4$ 、 $a+6$ 、 $a+10$ 均为质数。



【解答】符合条件的最小质数是7。



3 莹莹的大家庭里,包括莹莹自己共有三个表兄妹,他们三人的年龄是连续的自然数,且三人年龄的乘积为24。他们的年龄分别是多少岁?

【思路导引】



既然三个数的积是24,我们先将24分解质因数再来看。

$24=2\times 2\times 2\times 3$,三人的年龄是三个连续的自然数,那只能将24的所有因数重新组合,即 $24=2\times(2\times 2)\times 3$ 。



【解答】 $24=2\times 2\times 2\times 3=2\times(2\times 2)\times 3$

答:这三人的年龄分别是2岁、3岁、4岁。

解决这类问题,通常先分解质因数,再根据题意重新组合。

争星显优



1. 两个不同质数的和是 18, 积是 65。这两个质数分别是多少?

2. 在 1~9 的自然数中, 任取一个质数与一个合数相乘, 则所有这些积的和是多少?

3. 三个不同质数的和是 80, 这三个质数的积最大是多少?



4. 当 a 和 $a^3 + 5$ 都是质数时, $a^5 + 5$ 的值是多少?

5. 如果 a 是合数, 而且 $a+3, a+5, a+7$ 都是合数, a 最小是多少?



6. 四个学生, 他们的年龄一个比一个大 1 岁, 且他们的年龄乘积是 5040, 他们的年龄分别是多少?

7. 一个长方形的周长是 16cm, 且长和宽都是质数。这个长方形的面积是多少?



4. 巧用奇偶性解决生活问题

培优策略

根据是不是2的倍数将自然数分为奇数和偶数两大类：能被2整除的数叫偶数，通常用 $2n$ 表示；不能被2整除的数叫奇数，通常用 $2n+1$ 表示。巧妙运用数的奇偶性，可以解决生活中许多有趣的问题。



提优讲解



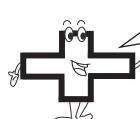
1 3个杯子，杯口全部朝上放在桌上。每次翻动2个杯子，经过若干次翻动，能否使3个杯子杯口全部朝下。简要说明理由。

【思路导引】



这个问题看似很“纠结”，只能动手翻翻看，看能不能发现规律！第一步：将2个杯子由朝上翻动为朝下，这时杯口朝下的数量为2，与翻动前杯口朝下的数量0的奇偶性相同，都是偶数。

第二步：要么将2个杯子由朝下翻到朝上，这时口朝下为0，与翻前口朝下为0的奇偶性相同，为偶数；要么将1个朝下的杯子翻到朝上，1个朝上的翻到朝下，这时口朝下的数量与翻前口朝下的数量仍然都是偶数。



这样看来，每次翻动后口朝下的数量的奇偶性与翻动前口朝下的数量的奇偶性相同。

一开始口朝下的杯子数量为0个，是偶数，无论翻动多少次，口朝下的杯子数量只能是偶数而不是奇数。



【解答】不可能翻到3个杯子杯口都朝下。因为每次杯口朝下的数量与翻前杯口朝下的数量只能是偶数。

杯子的个数是奇数，而每次翻动的个数是偶数，不会有杯口全朝下的情况。

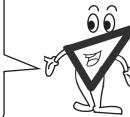


2 五(1)班选派15名同学参加学校举行的数学竞赛。竞赛题共20道。评分方法是：基础分15分，答对一题加5分，不答加1分，答错一题倒扣1分，所有参赛的同学的得分总数是奇数还是偶数？



要知道总分是奇数还是偶数，关键看每位同学得分是奇数还是偶数！如果每位同学每题都答对了，则每位同学可得 $15+5\times20=115$ （分）。

如果一题不答，则少得 $5-1=4$ （分）；无论几题不答，少得的分一定是4的倍数，也就是偶数，所以实得分一定是奇数。同理，答错一题少得 $5+1=6$ （分），6的倍数也是偶数，实得分只能是奇数。



【解答】全对得分： $15+5\times20=115$ （分）……奇数

$(5-1)\times N$ （ N 表示任意自然数，此处表示不答的题数）=偶数

$(5+1)\times M$ （ M 表示任意自然数，此处表示答错的题数）=偶数

奇数-偶数=奇数 所以每名同学的得分都是奇数。

15名同学参赛，15是奇数，奇数个奇数相加仍然是奇数。

答：所有参赛同学的得分总数是奇数。



争星显优



1. $1+2+3+4+\cdots+1997$ 的和是奇数还是偶数?

2. 若 $61 \times 33 \times A \times 1999 \times 2015$ 为奇数, 则 A 是奇数还是偶数?

3. 一个茶杯杯口朝上放在桌子上, 翻动 1 次杯口朝下, 翻动 2 次杯口朝上, 翻动 2008 次后杯口朝哪里?



4. $2014-2013+2012-2011+\cdots+2-1$ 的结果是奇数还是偶数?

5. a, b, c 是任意给定的三个整数, 那么乘积 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 是奇数还是偶数? 说明理由。



6. 桌上有 7 只倒扣着的茶杯, 规定每次必须翻转其中 4 只茶杯, 称为一次“运动”。问能否进行若干次“运动”, 使 7 只茶杯的杯口都朝上?

【提示: 一只倒扣茶杯翻转 1 次, 杯口朝上; 翻转 2 次, 杯口朝下; 翻转 3 次, 杯口又朝上……不难发现, 每只倒扣的茶杯必须翻转奇数次才能使杯口朝上, 7 个奇数的和仍是奇数, 所以要使 7 只茶杯全翻过来, 翻转的总次数必须是奇数。根据规定, 一次“运动”必须同时翻转 4 只茶杯, 那么不管进行多少次“运动”, 翻转的总次数是 4 的倍数, 是一个偶数。】



单元综合提优(一)

巧用分解质因数解决问题

培 优 策 略

把一个数分解成质因数相乘的形式,能启发我们寻找解答许多难题的突破口,更能顺利解题。



提优讲解



把 85、77、55、34、30、28、15、9 这八个数均分成两组,使每组四个数的乘积相等。

【思路导引】



把八个数平均分成两组,每组4个数,要使两组数的乘积相等,那么这两组数的积中所含有的质因数的大小与个数必须完全相同。

首先把这八个数分解质因数发现:
这些因数中一共有四个2、四个3、
四个5、两个7、两个11、两个17。



那么,在所分成的两组中,应该各含有的质因数是两个2,
两个3,两个5,一个7,一个11,一个17。



$$\begin{array}{llll} \text{【解答】} & 9=3\times 3 & 15=3\times 5 & 28=2\times 2\times 7 \\ & 34=2\times 17 & 55=5\times 11 & 77=7\times 11 \\ & & & 30=2\times 3\times 5 \\ & & & 85=5\times 17 \end{array}$$

因为: $9\times 55\times 85\times 28=15\times 30\times 34\times 77$

所以分成的两组数分别是:9、28、55、85 和 15、30、34、77。



植树节那天,王老师带着部分同学去植树,同学们按人数恰好可以平均分成4组,王老师也一起动手参加植树,并且师生每人植的棵数一样多,已知他们一共植了168棵树,并且每人植树的棵数不满10棵,那么,每人植树多少棵?

【思路导引】



由“每人植的棵数×总人数=总棵数”,
不难知道“每人植的棵数”和“总人数”都
是168的因数,可以考虑将168分解质因数。

$168=2\times 2\times 2\times 3\times 7$,由于学生恰好
可以平均分成4组,再加上一个老师,
因此,总人数一定是4的倍数多1,可
以看出只有 $3\times 7=21$ 是符合条件的。



$$\text{【解答】 } 168=2\times 2\times 2\times 3\times 7$$

$$=(2\times 2\times 2)\times (3\times 7)$$

$$=8\times 21$$

答:每人植了8棵树。

很多数学问题的解决，常常需要把一个数先分解质因数，以便研究已知数和未知数之间的关系，使问题迎刃而解。

争星显优



- 用一个两位数除 708,余数为 43,求这个两位数。
 - 将一个两位数的十位数字与个位数字互换所成的两位数与原数的积是 3154,求原数。
 - 把 15、28、45、55、60、77 这六个数平均分成两组,使每组里三个数的乘积相等。
 - 万老师把全班学生平均分成了两组,并和全体学生一起为学校搬运新课桌,已知老师和每名学生搬的张数都相同,共搬了 148 张桌子,那么,这个班有多少名学生?



5. 已知 2008 被一些自然数去除,得到的余数都是 10,这些自然数共有多少个?
6. $45 \times 28 \times 250 \times (\quad)$,要使这个连乘积的最后五个数字都是 0,括号内最小应填什么?
7. 有三个自然数 a 、 b 、 c ,已知: $a \times b = 96$, $b \times c = 84$, $a \times c = 56$,求这三个自然数 $a+b+c$ 的和是多少?
8. 将 1.4、0.33、3.5、0.3、0.75、0.39、14.3、16.9 这 8 个数平均分成两组,使得它们的乘积相等。



9.   某校五(2)班有 35 个同学,学号分别为 1~35。一天,他们去春游,除了班长之外,其余 34 个同学分成 5 组,结果发现每个小组的同学学号之和都相等,后来这 34 个同学又重新分成 8 组,结果发现每个小组的同学学号之和还是相等,那么班长的学号是多少?



三、长方体和正方体

1. 长方体和正方体的展开图

培 优 策 略

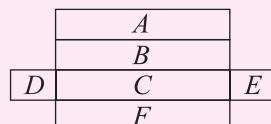
解决判断展开图相对的面或哪种展开图可以围成长方体或正方体的问题时,通常借助“相邻面有公共边”和“相对的面不相邻”等规律进行判断。



提优讲解

1

右图是一个长方体的展开图,与 A 面相对的是()面,与 B 面相对的是()面,与 D 面相对的是()面。



【思路导引】



可在纸上仿画一个展开图,剪下来,折一折就知道了!

还可用假设法来想:假设 C 为底面,B 和 F 向上折,可知 B、F 相对;那么 A 就要盖在 C 上了;剩下 D 和 E 自然相对,作左、右面。



【解答】C F E

解决这类问题用“复原”的方法画一画、折一折很有效;用假设法找到一个底面再想象折一折也很有效。

2

将正方体沿棱剪开成平面展开图,那么,一共有多少种不同的展开图?

【思路导引】

分类来剪剪看。我让展开图最长一行有 4 个正方形,为了便于记,取名(1, 4, 1)型,居然有 6 种。

我剪成最长一行有 3 个,记为(2, 3, 1)型,有 3 种。

我剪成只有 2 行,每行 3 个的,记为(3, 3)型,只有一种。

我剪的最长一行有 2 个,共 3 行,记为(2, 2, 2)型,共 1 种。

16

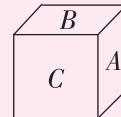
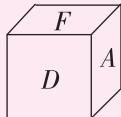
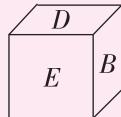
五年级数学下



【解答】一共有 11 种不同的展开图。

3

一个正方体的 6 个面分别写着 A、B、C、D、E、F，根据下面的三种摆放情况，判断每个字母对面的字母是什么？



【思路导引】



直接判断相对的两个字母很难，可以根据“相邻字母不可能相对”的规律来想！

小弟，这个办法好极了！可先看与这个字母相邻的字母有哪些，从而推出它的对面不会有什么字母。一般先从出现次数多的字母想起！



那从第一、二两图可知：与 D 相邻的是 B、E、A、F，由此可知 D 的对面只能是 C。

从第二、三两图可知：与 A 相邻的是 D、F、B、C，由此可知 A 的对面是 E；剩下的 B 只能与 F 对应！



【解答】A 的对面是 E，D 的对面是 C，B 的对面是 F。

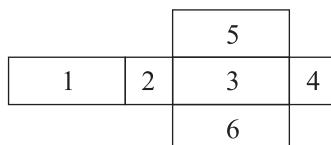
在判断正方体相对的面上的字母或数字时，先找出与这个面相邻面上的字母或数字（一般先想出现次数较多的数字或字母），再判断与这个面相对面上的字母或数字。



争星显优

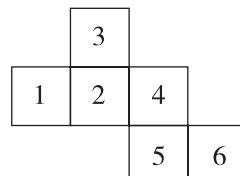


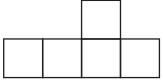
1. 将下图折成一个长方体后，下面关于对面的说法，正确的是（ ）。



- A. 1 对 3, 2 对 5, 4 对 6
- B. 1 对 3, 2 对 4, 5 对 6
- C. 1 对 6, 2 对 4, 3 对 5

2. 如图，将图中的硬纸片折成一个正方体，则这个正方体的 2 号面对面是（ ）号面。



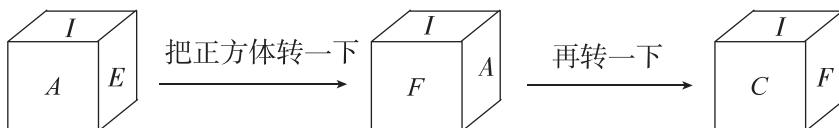
3. 一个由小正方体拼成的立体图形,从正面看到的形状是  ,从左面看到的形状是  。要拼成这样的立体图形,至少要多少个小正方体?最多要多少个小正方体?



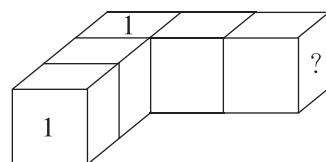
4. 如下图,四个完全相同的正方体木块并排放在一起,木块的六个面上涂有红、黄、蓝、白、黑、绿六种不同的颜色,则与涂蓝色的面相对的那一面是什么颜色?



5. 正方体的6个面分别写着A、C、D、E、F、I。与A、E、I相对的面分别是哪个面?



6. 如图所示,每个正方体的六个面上分别写着1、2、3、4、5、6这六个数,并且任意两个相对的面上所写的两个数的和都等于7,现把这5个正方体一个挨着一个连接起来,在紧挨着的两个面上的两个数之和都等于8,那么图中标有问号的那个面上所写的数是多少?





2. 拼割中表面积的变化

培优策略

图形切割(或拼合)时,表面积的变化是有规律的:每切割(或拼合)一次就增加(或减少)两个切割面(拼合面)的面积。



提优讲解



把两个底面都是 25cm^2 的正方体拼成一个长方体,长方体的表面积是多少?

【思路导引】



每个小正方体有6个面,两个共有12个面。拼成长方体后,拼接处减少了两个面哩!



还可这样想:底面积是 25cm^2 ,说明边长是5 cm,那么长方体的长是 $5\times 2=10\text{cm}$,宽和高都是5cm。

确实如此! ,从图中可知:长方体的表面积由 $12-2=10$ 个正方形的面组成。



有了拼成的长方体的长、宽、高的长度,直接用长方体的表面积公式就容易计算了。



【解答】方法一: $25\times(6\times 2-2)$

$$=25\times 10$$

$$=250(\text{cm}^2)$$

答:长方体的表面积是250平方厘米。

方法二: $25=5\times 5$

$$(5\times 2\times 5+5\times 2\times 5+5\times 5)\times 2$$

$$=125\times 2$$

$$=250(\text{cm}^2)$$



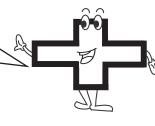
2 一个正方体的棱长是3dm。如果把它切成棱长是1dm的小正方体,这些小正方体的表面积的和是多少平方分米?

【思路导引】

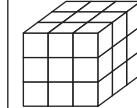


这还不容易,先看看一共可切成多少个小正方体,然后再依次求出一个小正方体的表面积和所有小正方体的表面积。

正方体棱长3dm,切成棱长1dm的小正方体,说明可分成 $(3\times 3\times 3)\div(1\times 1\times 1)=27$ (个)小正方体,每个小正方体表面积为 $1\times 1\times 6=6(\text{dm}^2)$,27个的表面积直接乘就行。



还可以画图看看切成小正方体后表面积增加了多少,再将原表面积加上新增加的表面积。



从图可知,需要切六刀,每切一刀增加两个面积为 $(3\times 3)\text{dm}^2$ 的切面。



【解答】方法一:

$$(3\times 3\times 3)\div(1\times 1\times 1)=27(\text{个})$$

$$27\times(1\times 1\times 6)=162(\text{dm}^2)$$

答:这些小正方体的表面积的和是162平方分米。

方法二: $3\times 3\times 6+3\times 3\times(6\times 2)$

$$=54+108$$

$$=162(\text{dm}^2)$$

每切割(或拼合)一次会相应增加(或减少)两个切面或拼合的面。计算切割(或拼合)图形的表面积时,一定先弄清表面积增加(或减少)了几个面。



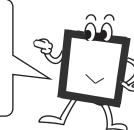
3

用两个长 8 厘米、宽 4 厘米、高 3 厘米的小长方体，拼成一个表面积最大的长方体，这个长方体的表面积是多少？

【思路导引】



把两个相同的长方体拼成一个大长方体，必须把两个相同的面拼合在一起，所得的长方体表面积就减少两个拼合面的面积。



要使大长方体的表面积最大，那只能使两个拼合面的面积最小才行！

【解答】 $(8 \times 4 + 8 \times 3 + 4 \times 3) \times 2 \times 2 - 4 \times 3 \times 2 = 248$ (平方厘米)

答：这个长方体的表面积是 248 平方厘米。

拼合时，要使表面积最大，只能将最小面拼合在一起；反之，要使表面积最小，只能将最大面拼合在一起。

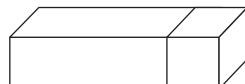


争星显优



1. 把三个底面积都是 30cm^2 的正方体拼搭成一个长方体，长方体的表面积是多少？

2. 如图，一个正方体和一个长方体，刚好拼成一个新的长方体，其表面积比原来的长方体的表面积增加了 60cm^2 。原来正方体的表面积是多少？



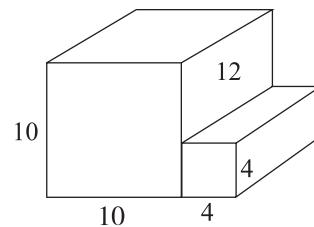
3. 一个正方体的棱长为 6dm。如果把它切成棱长是 2dm 的小正方体，这些小正方体的表面积之和是多少？

三、长方体和正方体



4. 用三个长7cm、宽5cm、高3cm的小长方体，拼成一个表面积最小的长方体，这个长方体的表面积是多少？

5. 求出下面立体图形的表面积。(单位:dm)



6. 把一根长15dm的长方体木料沿横截面锯成3段后，表面积增加了 24dm^2 ，这根木料的横截面的面积是多少？

7. 一根长1m，宽和高都是15cm的长方体木料，从一端锯下一个最大的正方体后，它的表面积减少了多少？



8. 难题讲解 把一个表面积是 516cm^2 的正方体切割成8个相同的小正方体(无剩余，损耗不计)，切割后的8个小正方体的表面积之和比原来大正方体的表面积增加多少？



3. 装物体中的学问

培 优 策 略

装物体到包装箱时,不仅要考虑物体和包装箱的体积,还要考虑物体与包装箱对应的尺寸,尽量把空间占满。当箱子有剩余但不够再摆放一盒时,要根据实际情况,用“去尾法”取近似值。



提优讲解

1

一个木箱,从里面量长40cm,宽30cm,体积为 24dm^3 。老师想用它来装一件长30cm、宽28cm、高25cm的长方体教具。是否可以装下?

【思路导引】



这太容易了!先求出长方体教具的体积,再与木箱的体积比比看不就知道了!

老弟,你太粗心了!生活中装物体还得考虑物体的长、宽、高与箱子的长、宽、高是否合适,因为有的物体是不能折叠的!这里只能先求出木箱的高,然后将物体与木箱的长、宽、高分别比较才行。



【解答】 $24\text{dm}^3 = 24000(\text{cm}^3)$

$$24000 \div (40 \times 30) = 20(\text{cm})$$

$$40 > 30, 30 > 28, 20 < 25$$

答:由于教具比木箱还要高,所以不能装下。

2

一只集装箱,它的内尺寸是 $18 \times 18 \times 18$ 。现在有一批货箱,它的外尺寸是 $1 \times 4 \times 9$,问这只集装箱能装多少只货箱?(单位:dm)

【思路导引】



这里货箱外尺寸是 $1 \times 4 \times 9$,集装箱内尺寸是 $18 \times 18 \times 18$,18不是4的倍数,不能简单地用集装箱体积除以货箱体积!

那好办,16是4的倍数,先假设集装箱尺寸是 $18 \times 18 \times 16$,那么可放 $(18 \times 18 \times 16) \div (1 \times 4 \times 9)$ 只货箱,还有 $18 \times 18 \times (18 - 16)$ 的空间,但也只能放 $18 \times 2 \times 16$ 的空间的货,故又可放 $(18 \times 2 \times 16) \div (1 \times 4 \times 9)$ 只。



【解答】 $18 \times 16 \times 18 \div (1 \times 4 \times 9) + 18 \times 2 \times 16 \div (9 \times 1 \times 4)$

$$= 144 + 16$$

$$= 160(\text{只})$$

答:这只集装箱能装160只货箱。

当容器的内尺寸的数据不是要装货物外尺寸的倍数时,要求容器能装多少个货物,不能简单地用“容器的体积(容积)÷货物的体积”来求,一定要结合实际,先在头脑中形成真实摆放的表象,再求能装的数量。



争星显优



- 一个包装盒,从里面量宽和高都是20cm,体积是 12.8dm^3 。这个包装盒能装下一个长30cm、宽18cm、高19cm的长方体木块吗?
- 一个长8dm、宽6dm、高11dm的长方体纸盒,最多能放多少个棱长为20cm的正方体木块?
- 希望新村搭建长方体大棚,大棚长70m,宽16m,高8m,现将棱长为5m的正方体培育器放进大棚,最多能放几个?



- 有一个长方体的盒子,从里面量长40cm、宽12cm、高7cm。在这个盒子里放长5cm、宽4cm、高3cm的长方体木块,最多可放几块?
- 现把棱长为2cm的正方体冰块放进冰箱抽屉。已知抽屉长40cm,宽14cm,高18cm。若要塞满抽屉,需要多少个冰块?



- 篮球队有55个篮球,每个篮球都装在体积为 27000cm^3 的正方体纸盒里,现要把这些篮球(带包装盒)装进棱长为100cm的正方体箱子里。要把它们装完共需要多少个箱子?

4. 妙解体积与容积中的问题

培 优 策 略

解决长方体和正方体的体积与容积问题,一定要在题意中找到相关的隐藏信息,利用“不变量”来解决问题。



提优讲解

1

一个正方体的高增加4dm,得到一个长方体,它的表面积比原来正方体的表面积增加了 80dm^2 。原正方体的体积是多少立方分米?

【思路导引】



先画个草图看看:
从图中看出:高增加4dm,
表面积增加的部分其实是4
个面积相等的小长方形。

还真是的哩,老兄!这样一来,每个小长方形的面积就是 $80 \div 4 = 20(\text{dm}^2)$,继而可推出小长方形的长是 $20 \div 4 = 5(\text{dm})$,这也就是正方体的棱长!有了棱长,体积就好求了。

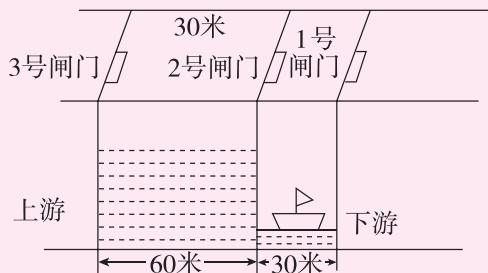


【解答】 $80 \div 4 \div 4 = 5(\text{dm})$ $5 \times 5 \times 5 = 125(\text{dm}^3)$

答:原正方体的体积是125立方分米。

2

船通过大坝是利用船闸进行的。下图是两级船闸的示意图。船不通行时1,2,3号闸门都关闭,现在船从下游驶往上游。这个大坝宽30米,长分别为60米和30米,现在水深分别为35米和5米。船先进入1号闸门,再关闭1号闸门,打开2号闸门。打开闸门后,大约可以使船升高多少米?若船要进入上游还应怎么办?



【思路导引】



2号闸门未打开时,上游闸室的水深比下游闸室的水深高 $35 - 5 = 30(\text{米})$,即上游闸室比下游闸室多 $60 \times 30 \times 30 = 54000(\text{立方米})$ 的水。打开2号闸门,多的水会流入下游闸室,两室水面会齐平。

那么这时多的水形成的高度就是船升高的高度。船要进入上游,还应关闭2号闸门,打开3号闸门,当水面齐平时,船才可进入上游。



【解答】 $35 - 5 = 30(\text{米})$ $60 \times 30 \times 30 = 54000(\text{立方米})$

$54000 \div (60 \times 30 + 30 \times 30) = 20(\text{米})$

答:打开2号闸门,船可上升20米;船要进入上游,还应关闭2号闸门,打开3号闸门,当水面齐平时,船就可进入上游。



3

一个长方体容器内装满水,现在有大、中、小三个铁球。第一次把小球沉入水中;第二次把小球取出,把中球沉入水中;第三次把中球取出,把小球和大球一起沉入水中。已知每次从容器中溢出的水量的情况是:第二次是第一次的4倍,第三次是第一次的2.5倍,则大球的体积是小球体积的多少倍?

【思路导引】



小球体积设为“1”,则第一次溢出水的体积为“1”。据第2次溢出水的体积是第一次的4倍可知,第2次溢出水的体积为 $1 \times 4 = 4$ 。取出小球后空出体积为“1”,所以中球的体积为 $1 + 4 = 5$ 。

第三次溢出水的体积是第一次的2.5倍,那第三次溢出 $1 \times 2.5 = 2.5$ 体积的水。又因为取出中球后空出体积为5,所以大、小球的体积和是 $5 + 2.5 = 7.5$,从而大球体积为 $7.5 - 1 = 6.5$ 。



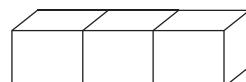
【解答】 $(1 \times 4 + 1 + 1 \times 2.5 - 1) \div 1 = 6.5$

答:大球的体积是小球体积的6.5倍。

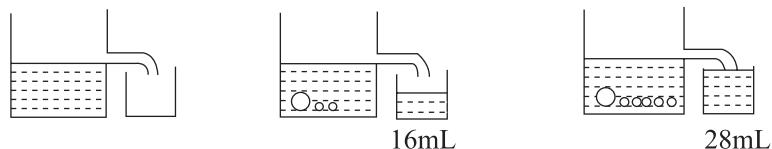
争星显优



1. 如图,将一个长方体平均截成3段,每段长4m,表面积增加了 $16m^2$ 。求原长方体的体积是多少立方米?

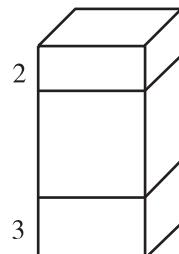


2. 如图,求大球的体积。



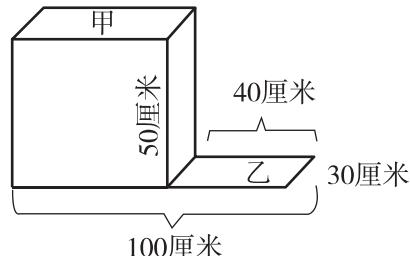
3. 有一个长方体,它的前面和上面的面积和是 $88dm^2$,如果它的长、宽、高都是质数,那么长方体的体积是多少?

4. 一个长方体木块,从上部分和下部分分别截去高为2cm和3cm的长方体后(如图),便成为一个正方体,表面积减少了 120cm^2 。原长方体的体积是多少立方厘米?



5. 有一个长方体的底面是正方形,侧面展开正好是一个边长为20cm的正方形,求这个长方体的体积是多少立方厘米?

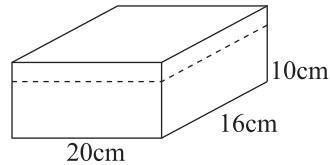
6. 如图,有一块长方形土地,甲处比乙处高50cm,现在要把这块土地推平。要从甲处取走多少厘米厚的土填在乙处?



7. 一个底面是正方形的长方体的纸盒,展开它的侧面得到一个边长是12dm的正方形。这个纸盒的体积是多少?



8.  难题讲解 8. 如图,有一个完全密封的长方体容器,从里面量长20cm、宽16cm、高10cm,平放时里面装了7cm深的水。如果把容器向左翻转使容器左面朝下竖起来,此时的水深是多少厘米?





5. 探索图形中的奥秘

培优策略

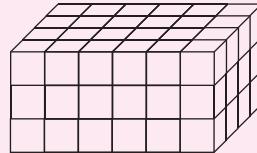
将一个棱长为 n 的表面涂有颜色的正方体切成棱长为 1 厘米的小正方体，则这些小正方体中，三面涂色：8 个，两面涂色： $(n-2) \times 12$ 个，一面涂色： $(n-2) \times (n-2) \times 6$ 个，没有涂色： $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$ 个。



提优讲解

1

一个表面涂色的大长方体木块，长 6 厘米、宽 4 厘米、高 3 厘米，把它切割成棱长为 1 厘米的小正方体木块。三面、两面、一面涂色的小正方体各有多少个？表面无色的小正方体有多少个？



【思路导引】



这太复杂了！看得我头都大了，怎么去数才好呢？

急啥，仔细观察，这里面有秘密的：三个面涂色的在长方体的顶点处，共 8 个。两个面涂色的在长方体 12 条棱的两侧（除去角上的），其中 4 条长的棱上各有 4 个，4 条宽的棱上各有 2 个，4 条高的棱上各有 1 个。一个面涂色的在长方体的六个面上，前、后面各有 $(6-2) \times (3-2)$ 个；上、下面各有 $(6-2) \times (4-2)$ 个；左、右面各有 $(4-2) \times (3-2)$ 个。



我明白了，那表面无色的就在长方体的中间，有 $(6-2) \times (4-2) \times (3-2)$ 个，还可从总数中减去表面有色的正方体的个数。

【解答】 三面涂色的小正方体：8 个；

两面涂色的小正方体： $(6-2) \times 4 + (4-2) \times 4 + (3-2) \times 4 = 28$ （个）；

一面涂色的小正方体： $(6-2) \times (3-2) \times 2 + (6-2) \times (4-2) \times 2 + (4-2) \times (3-2) \times 2 = 28$ （个）；

表面无色的小正方体： $(6-2) \times (4-2) \times (3-2) = 8$ （个）或 $6 \times 4 \times 3 - 8 - 28 - 28 = 8$ （个）。

一个长方体长为 a 厘米，宽为 b 厘米，高为 c 厘米（ a, b, c 均为整数），将它的表面涂上颜色，然后切成棱长 1 厘米的小正方体。其中三面涂色的正方体个数为 8；两面涂色的正方体个数为 $(a-2) \times 4 + (b-2) \times 4 + (c-2) \times 4$ ；一面涂色的正方体个数为 $(a-2) \times (b-2) \times 2 + (a-2) \times (c-2) \times 2 + (b-2) \times (c-2) \times 2$ ；表面无色的正方体的个数为 $(a-2) \times (b-2) \times (c-2)$ 。

2

一个表面涂色的长方体木块，长、宽、高都是整数厘米，把它切割成若干个棱长为1厘米的小正方体木块。如果存在恰有5个面涂色的小正方体，那么这样的小正方体最多有多少个？

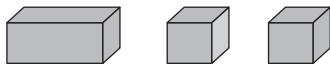
【思路导引】



从图中可知：有5个面涂色的小正方体只有1个面与其他正方体重合，所以只能在长方体两头。



不仅如此，长方体还只能由一排小正方体组成。如图所示：



【解答】 这样的小正方体最多只有 2 个。



争星显优



1. 一个棱长是 8cm 的正方体木块, 表面涂有蓝色油漆, 现在把它加工成棱长是 2cm 的小正方体。

(1) 共可以加工成多少个这样的小正方体?

(2) 加工后, 其中一面涂色的小正方体有多少个? 两面涂色的、三面涂色的各有多少个? 表面没涂色的又有多少个呢?

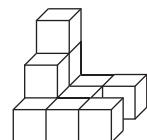
2. 把一个表面涂色的大正方体木块, 切割成 216 个同样大小的小正方体木块。三面、两面、一面涂色的小正方体木块各有多少个? 表面无色的小正方体木块有多少个?

3. 一个表面涂色的大长方体木块, 长 7cm、宽 6cm、高 4cm, 把它切割成棱长为 1 厘米的小正方体木块。三面、两面、一面涂色的小正方体各有多少个? 表面无色的小正方体有多少个?



4. 把一个表面涂色的大正方体木块切割成同样大小的小正方体木块，其中表面无色的小正方体木块有 64 个，那么三面、两面、一面涂色的小正方体木块各有多少个？

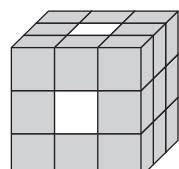
5. 用小正方体搭成下面的立体图形，然后将它的表面涂上颜色。这些小正方体根据表面涂色面的多少可以分成几类？每类各有多少个？



6. 一个大正方体由若干个小正方体组成，在大正方体的表面涂色。其中一面涂色的小正方体有 150 个，这个大正方体是由多少个小正方体组成的？

7. 将 27 个棱长为 5cm 的小正方体拼成一个棱长为 15cm 的大正方体，相互粘紧。自上而下，自前而后，去掉中间的小正方体，求剩下部分的表面积是多少？

【提示：去掉后，里面增加了多少个小正方形的面积。】

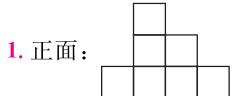




参考答案

一、观察物体(三)

物体的摆放



2. 如图所示,最少共有 $4 \times 3 + 3 + 1 = 16$ (块)

3. 最少需要 6 个,最多需要 9 个。

4. 列表思考:

图序	(1)	(2)	(3)	(4)	...	(n)
小正方体个数	2	4	6	8	...	$2n$
露在外面的面数	9	14	19	24	...	$5n+4$

所以第 8 幅图小正方体个数为 $2 \times 8 = 16$ (个),露在外面的面数为 $5 \times 8 + 4 = 44$ (个)。

5. 留下靠墙及地面的正方体,其余的正方体都搬走。可搬走: $1+3+6=10$ (个)。

二、因数与倍数

1. 巧算一个数的因数的个数

1. $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$, 60 的因数有 $2 \times 6 = 12$ (个);

$90 = 1 \times 90 = 2 \times 45 = 3 \times 30 = 5 \times 18 = 6 \times 15 = 9 \times 10$, 90 的因数有 $2 \times 6 = 12$ (个)。

2. $196 = 1 \times 196 = 2 \times 98 = 4 \times 49 = 7 \times 28 = 14 \times 14$, 196 的因数有 $2 \times 4 + 1 = 9$ (个)。

3. 除数与商的积是 $37 - 5 = 32$, 两个自然数相乘的积是 32 的有三种情况: 1×32 , 2×16 , 4×8 , 除数只能是 32, 16, 8, 所以共有三种不同的填法。

4. 长方形的长和宽都是整厘米数,因此要把 165 分解成两个因数相乘的形式, $165 = 1 \times 165 = 3 \times 55 = 5 \times 33 = 11 \times 15$, 所以这样的长方形共有 4 个。

5. $96 = 1 \times 96 = 2 \times 48 = 3 \times 32 = 4 \times 24 = 6 \times 16 = 8 \times 12$, 1 \times 96 不满足题意,所以共有 $2 \times 5 = 10$ (种)拿法。

6. 一共有 16 个。(它们是 $a, b, c, d; ab, ac, ad, bc, bd, cd; abc, abd, bcd, acd; abcd; 1$)

2. 巧用倍数特征解决问题

1. $\square 47.7 \square$ 元可看作 $\square 477 \square$ 分,这个数是 72 的倍数。根据数的整除特征,求出总价为 347.76 元。

2. 两支铅笔用去 1 元,其余物品用去的总钱数应是 3 的倍数(化成以分为单位的数);但是 $11 - 1 = 10$ 元 = 1000 分, 1000 不是 3 的倍数,所以售货员肯定把账算错了。

3. 每 5 枝包装成 1 束,能正好包装完,因为 125 是 5 的倍数。如果每 2 枝包装成 1 束,至少再加 1 枝能正好包装完。因为 2 的倍数个位上是 0, 2, 4, 6, 8, 125 的个位是 5, $5+1=6$ 。

4. 41 本。因为 2 本 2 本发余 1 本, 5 本 5 本发也余 1 本,说明本数是 2, 5 的倍数多 1,那么 $40 \sim 50$ 间 2, 5 的倍数有 40, 50, 而本数可能是 $40+1=41$, $50+1=51$, 因总数在 40 ~ 50 间,所以 41 符合题意。

5. $(12+13+16+17+22+27+32) \div (1+3)=34 \dots 3$

$$27 \div (1+3)=6 \dots 3$$

$$(12+13+16+17+22+32) \div (1+3)=28(\text{升})$$

$$12+16=28(\text{升})$$

答:27 升的是汽油,12 升和 16 升的是机油,其余的是柴油。

6. 这个数能被 4, 5 整除,则末位一定是 0,且最后两个数一定是 4 的倍数,那么可以是 00, 20, 40, 60, 80;这个数又要是 3 的倍数, $3+5+8=16$,要使这个数最小,那么三个数字分别为 020,则最小的一个数是 358020。

$$7. 55 \div (1+3)=13 \dots 3$$

$$(55-13) \div (1+2)=14(\text{棵}) \quad 14 \times 2=28(\text{棵})$$

答:一班分到 28 棵,二班分到 14 棵,三班分到 13 棵。

8. 总价以分为单位为: 1 \square 245 \square , 它是 36 的倍数,必定是 4 和 9 的倍数,符合条件的总价有 3 个: 1424. 52 元、1024. 56 元和 1924. 56 元。

$$1424.52 \div 36=39.57(\text{元})$$

$$1024.56 \div 36=28.46(\text{元})$$

$$1924.56 \div 36=53.46(\text{元})$$

只有第 3 个算式的结果个位上是 3, 符合要求。

答: 总价为 1924. 56 元,单价为 53.46 元。

3. 巧用质数与合数解决问题

1. 两个质数分别是 13 和 5。

$$2 \times 4 + 2 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 9 = 2 \times (4+6+8+9)$$

$$3 \times 4 + 3 \times 6 + 3 \times 8 + 3 \times 9 = 3 \times (4+6+8+9)$$

$$5 \times 4 + 5 \times 6 + 5 \times 8 + 5 \times 9 = 5 \times (4+6+8+9)$$

$$7 \times 4 + 7 \times 6 + 7 \times 8 + 7 \times 9 = 7 \times (4+6+8+9)$$

所有的积是: $(2+3+5+7) \times (4+6+8+9)=459$

3. 3034。因为三个质数相加的和为偶数,必有一个质数是 2, $80-2=78$, 剩下两质数和为 78,要使积最大,只能是 41 和 37,故三个质数是 2, 37, 41, 它们的乘积是 $2 \times 37 \times 41=3034$ 。

4. a 不可能是奇数,因为如果 a 为奇数,则 a^3 也是奇数,那么 a^3+5 是偶数,它就不可能是质数,所以 $a=2$ 。

$$a^5+5=2^5+5=37.$$

5. 最小是 9。

6. 分别是 7, 8, 9, 10 岁。因为 $5040=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7=7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5)=7 \times 8 \times 9 \times 10$ 。

7. 15cm^2 。因为 $16 \div 2=8(\text{cm})$,长、宽都是质数,所以 $8=3+5$,即长、宽分别为 5cm, 3cm,故面积为 $3 \times 5=15(\text{cm}^2)$ 。

4. 巧用奇偶性解决生活问题

1. 奇数。因为数的个数是奇数个,则 $1+2+3+4+\dots+1997=(1+1997)+(2+1996)+\dots+(998+1000)+999$

任意多个偶数和仍是偶数

↓

奇数

偶数+奇数=奇数

2. 奇数

3. 朝上。因为从题意可知:奇数次朝下,偶数次朝上,2008 是偶数,故朝上。

4. 奇数。因为 $2014-2013=1$, $2012-2011=1, \dots, 2-1=1$, 共有 $2014 \div 2=1007$ (个),即 1007 个 1 相加,故是奇数。

5. ①当 a, b, c 全为偶数,则 $a+b, b+c, c+a$ 全为偶数,积是

偶数：

- ②当 a, b, c 中有 2 个偶数，一个奇数，那么这两个偶数的和为偶数，则 $a+b, b+c, c+a$ 中肯定有一个偶数，积为偶数；
- ③当 a, b, c 中有 1 个偶数，2 个奇数，那么这两个奇数的和为偶数，则 $a+b, b+c, c+a$ 中肯定有一个偶数，积为偶数；
- ④当 a, b, c 全为奇数，则 $a+b, b+c, c+a$ 全为偶数，积是偶数。

所以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 为偶数。

6. 每只倒扣的茶杯必须翻转奇数次才能使杯口朝上，7 个奇数的和仍为奇数，所以要使 7 只茶杯全翻过来，翻转的总次数必须是奇数。根据规定，一次“运动”必须同时翻转 4 只茶杯，那么不管进行多少次“运动”，翻转的总次数是 4 的倍数，它是一个偶数。所以不能进行若干次“运动”，使 7 只茶杯的杯口都朝上。

单元综合提优(一)

巧用分解质因数解决问题

1. $708 - 43 = 665$, $665 = 5 \times 7 \times 19 = 7 \times 95$, 所以除数只能是 95。
2. $3154 = 2 \times 19 \times 83 = 38 \times 83$, 所以原数是 83 或 38。
3. 第一组：45, 28, 55; 第二组：15, 60, 77。
4. $148 = (2 \times 2) \times 37$, $37 - 1 = 36$ (人), 所以，这个班有 36 人。
5. $2008 - 10 = 1998$, 所以，这些自然数应该为 1998 的大于 10 的因数， $1998 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 37$. 所以，满足条件的因数有： $37, 2 \times 37, 3 \times 37, 2 \times 3 \times 3, 2 \times 3 \times 37, 3 \times 3 \times 3, 3 \times 3 \times 37, 2 \times 3 \times 3 \times 3, 2 \times 3 \times 3 \times 37, 3 \times 3 \times 3 \times 37, 2 \times 3 \times 3 \times 37$. 即这些自然数共有 11 个。
6. 将四个数分解质因数，质因数 2 和 5 各至少出现 5 个，才能使乘积的最后至少出现 5 个 0，而 $45 = 3 \times 3 \times 5, 28 = 2 \times 2 \times 7, 250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$ ，前 3 个因数中已经出现了 3 个 2 和 4 个 5，还缺 2 个 2 和 1 个 5。 $2 \times 2 \times 5 = 20$ ，所以，括号中应填 20。
7. 由 $a \times b = 96 = 8 \times 12, b \times c = 84 = 12 \times 7, a \times c = 56 = 8 \times 7$ ，得 $a = 8, b = 12, c = 7$. 所以， $a+b+c = 7+8+12 = 27$ 。
8. 这两组数为 0.33, 3.5, 0.3, 16.9 和 1.4, 0.75, 0.39, 14.3。(提示：先将它们同时扩大 100 倍，再分解质因数。)
9. 根据题意，除班长之外的 34 个同学的学号之和既是 5 的倍数，又是 8 的倍数，即是 $5 \times 8 = 40$ 的倍数，而 $1+2+\dots+34+35=630$. 600 就是 40 的倍数， $630-600=30$ ，所以，班长的学号为 30。

三、长方体和正方体

1. 长方体和正方体的展开图

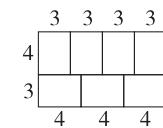
1. B 2. 6
3. 至少要用 5 个，最多要用 9 个。
4. 与蓝色相对的面是黄色。
5. I 与 D 相对 A 与 C 相对 E 与 F 相对
6. 与数字“1”相对的面是数字“6”，与数字“6”紧挨的面是数字“2”，与数字“2”相对的面是数字“5”，与数字“5”紧挨的面是数字“3”，与数字“3”相对的面是“4”，排除数字“1”，与数字“3”相邻的面是数字“2”或数字“5”，如果右面是数字“2”，紧挨的面是数字“6”，与数字“6”相对的面是数字“1”，与数字“1”紧挨的必须是数字“7”才符合题意，但没有数字“7”，则不是数字“2”，那就是数字“5”，紧挨的面是数字“3”，与“3”相对的是“4”，紧挨“4”的是“4”，与“4”相对的是数字“3。”标有“?”的那一面上所写的数是 3。

2. 拼割中表面积的变化

1. $30 \times 6 \times 3 - 30 \times 4 = 420(\text{cm}^2)$
2. $60 \div 4 = 15(\text{cm}^2)$ $15 \times 6 = 90(\text{cm}^2)$
3. $(2 \times 2 \times 6) \times [(6 \times 6 \times 6) \div (2 \times 2 \times 2)] = 648(\text{dm}^2)$
4. $3 \times 3 = 9(\text{cm})$
 $(7 \times 5 + 7 \times 9 + 5 \times 9) \times 2 = 286(\text{cm}^2)$
5. $10 \times 10 \times 2 + 10 \times 12 \times 4 + 4 \times 12 \times 2 + 4 \times 4 \times 2 = 808(\text{dm}^2)$
6. $24 \div 4 = 6(\text{dm}^2)$
7. $15 \times 15 \times 4 = 900(\text{cm}^2)$
8. $516 \div 6 = 86(\text{cm}^2)$ $86 \times 6 = 516(\text{cm}^2)$

3. 装物体中的学问

1. 能。
因为： $12.8 \times 1000 \div (20 \times 20) = 32(\text{cm})$
长： $32 > 30$ 宽： $20 > 18$ 高： $20 > 19$
包装盒的长、宽、高都大于长方体木块的长、宽、高，故能装下。
2. $20\text{cm} = 2\text{dm}$
一排可以放 $8 \div 2 = 4$ (块)，可以放 $6 \div 2 = 3$ (排)
一层可以放 $4 \times 3 = 12$ (块)，由于 $11 \div 2 = 5 \dots 1$ ，说明一共可以放 5 层，最多可以装： $4 \times 3 \times 5 = 60$ (块)
3. $70 \div 5 = 14$ (个) $16 \div 5 = 3$ (个)……1(m)
 $8 \div 5 = 1$ (个)……3(m) $14 \times 3 \times 1 = 42$ (个)
4. 长方体盒子高 7cm，正好是木块宽与高的和，长方体盒子的宽 12cm，正好是木块宽与高的公倍数，采用如图所示的拼放法可以填满盒子。最多可放：
 $40 \times 12 \times 7 \div (5 \times 4 \times 3) = 56$ (块)
5. $40 \div 2 = 20$ (块) $14 \div 2 = 7$ (排) $18 \div 2 = 9$ (层)
 $20 \times 7 \times 9 = 1260$ (个)
6. $27000 = 30 \times 30 \times 30$
 $100 \div 30 = 3$ (个)……10(cm)
 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (个)
 $55 \div 27 = 2$ (个)……1(个)
因为装 2 个箱子还剩 1 个篮球，故共要 $2+1=3$ 个箱子。



4. 妙解体积与容积中的问题

1. $4 \times 3 = 12(\text{m})$
 $16 \div [(3-1) \times 2] = 4(\text{m}^2)$
 $4 \times 12 = 48(\text{立方米})$
2. $(28 - 16) \div (5 - 2) = 4(\text{cm}^3)$ $16 - 4 \times 2 = 8(\text{cm}^3)$
3. $88 = 11 \times 8 = 11 \times (5+3)$
 $11 \times 5 \times 3 = 165(\text{dm}^3)$
4. $120 \div 4 = 30(\text{cm}^2)$ $30 \div (2+3) = 6(\text{cm})$
 $6 \times 6 \times (6+3+2) = 396(\text{cm}^3)$
5. $20 \div 4 = 5(\text{cm})$ $5 \times 5 \times 20 = 500(\text{cm}^3)$
6. $100 - 40 = 60(\text{cm})$
 $60 \times 30 \times 50 \div (100 \times 30) = 30(\text{cm})$
 $50 - 30 = 20(\text{cm})$
7. $12 \div 4 = 3(\text{dm})$
 $3 \times 3 \times 12 = 108(\text{dm}^3)$
8. $20 \times 16 \times 7 \div (16 \times 10) = 14(\text{cm})$

5. 探索图形中的奥秘

1. (1) $(8 \div 2) \times (8 \div 2) \times (8 \div 2) = 64$ (个) 或 $(8 \times 8 \times 8) \div (2 \times 2 \times 2) = 64$ (个)
(2) 24 个；24 个；8 个；8 个
2. $216 = 6 \times 6 \times 6$



三面:8个 两面: $(6-2) \times 12 = 48$ (个)

一面: $(6-2) \times (6-2) \times 6 = 96$ (个)

无色: $216 - 8 - 48 - 96 = 64$ (个)

3. 三面:8个

两面: $(7-2) \times 4 + (6-2) \times 4 + (4-2) \times 4 = 44$ (个)

一面: $(7-2) \times (6-2) \times 2 + (7-2) \times (4-2) \times 2 + (6-2) \times (4-2) \times 2 = 76$ (个)

无色: $(7-2) \times (6-2) \times (4-2) = 40$ (个)

4. $64 = 4 \times 4 \times 4$

三面:8个

两面: $4 \times 12 = 48$ (个)

一面: $4 \times 4 \times 6 = 96$ (个)

5. 可以分成4类:

5个面涂色:3个

4个面涂色:2个

3个面涂色:5个

2个面涂色:1个

6. $150 \div 6 = 25$

$$25 = 5 \times 5 \quad 5 + 2 = 7$$

$$7 \times 7 \times 7 = 343$$
(个)

7. 原大正方体的表面积: $15 \times 15 \times 6 = 1350$ (平方厘米)

增加的表面积: $5 \times 5 \times 4 \times 4 + 5 \times 5 \times 2 = 450$ (平方厘米)

4个表面减少的面积: $5 \times 5 \times 4 = 100$ (平方厘米)

剩下部分的表面积: $1350 + 450 - 100 = 1700$ (平方厘米)

单元综合提优(二)

放入或拿出中的容积问题

1. $(6 \times 10) \times 35 \times 5 = 10500$ (cm³)

2. $120 \times 60 \times 13 \div 1000 = 93.6$ (dm³)

3. $400 \times 20 - 25 \times 25 \times (25 - 23) = 6750$ (cm³)

4. $72 \times 2.5 \div (72 - 6 \times 6) - 2.5 = 2.5$ (cm)

5. $3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36$ (m³)

6. $5 \times 5 \times (5-2) \div 50 = 1.5$ (cm)

7. $10 \times 9 \times 6 = 540$ (dm³)

$$10 \times 9 \times 4 + 6 \times 6 \times 6 = 576$$
(dm³)

$540 < 576$ 铁块处于淹没状态。

$$6 \times 6 \times 6 \div (10 \times 9) = 2.4$$
(dm)

8. 如果是将铁块的“长×宽”面与容器底面紧贴,铁块没有淹没在水里:

$$15 \times 15 \times 6 \div (15 \times 15 - 5 \times 5) = 6.75$$
(cm)

如果是将铁块的“长(或宽)×高”面与容器底面紧贴,铁块处于淹没状态:

$$5 \times 5 \times 12 \div (15 \times 15) \approx 1.3$$
(cm)

$$1.3 + 6 = 7.3$$
(cm)

四、分数的意义和性质

1. 妙解分数的分子、分母变化问题

1. $\frac{8}{13}$ 。因为 $(21+2 \times 2) \div (3+2) = 5$, $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$,原来的分数是 $\frac{10-2}{15-2} = \frac{8}{13}$ 。

2. $\frac{11}{16}$ 。因为 $27-3=24$, $24 \div (1+2)=8$, $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$,

$$\frac{8+3}{16} = \frac{11}{16}$$

3. $\frac{17}{25}$ 。 $(42+8) \div 2 = 25$, $25-8=17$, $17 \div 25 = \frac{17}{25}$ 。

4. $\frac{1}{8}$ 。 $2-1=1$, $7+1=8$, $1 \div 8 = \frac{1}{8}$ 。

5. $99 = 3 \times 3 \times 11$, 真分数中分子是3的倍数有32个, 分子是11的倍数有8个, 既是3的倍数又是11的倍数有2个, 所以一共有 $98 - 32 - 8 + 2 = 60$ (个)

6. $\frac{11}{18}$ 。因为 $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \dots$

$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{12}{24} = \dots$ 所以原来分数是 $\frac{15-4}{18} = \frac{11}{18}$ 。

7. $\frac{5}{8}$ 。因为 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, 分子变化差值为 $1+1=2$, 通分后两分数分子相差 $6-4=2$, $2 \div 2=1$, 原分数分子加上1后的分数为 $\frac{6}{8} = \frac{6 \times 1}{8 \times 1} = \frac{6}{8}$, 原分数为 $\frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$ 。

8. $\frac{35}{45}$ 。 $80 \div (7+9)=5$, $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}$ 。

2. 短除法的妙用

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 30 \\ 3 \\ \hline 15 \\ 5 \end{array} \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 96 \\ 2 \\ \hline 48 \\ 3 \\ \hline 24 \\ 2 \\ \hline 8 \\ 2 \\ \hline 4 \\ 2 \end{array} \qquad 96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 75 \\ 5 \\ \hline 25 \\ 5 \end{array} \qquad 75 = 3 \times 5 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 48 \quad 28 \\ 2 \\ \hline 24 \quad 14 \\ 12 \quad 7 \end{array}$$

48和28的最大公因数: $2 \times 2 = 4$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 42 \quad 28 \quad 98 \\ 7 \\ \hline 21 \quad 14 \quad 49 \\ 3 \quad 2 \quad 7 \end{array}$$

42, 28和98的最大公因数: $2 \times 7 = 14$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 30 \quad 48 \\ 3 \\ \hline 15 \quad 24 \\ 5 \quad 8 \end{array}$$

30和48的最小公倍数: $2 \times 3 \times 5 \times 8 = 240$